

Chapitre 20 : Intégration

Table des matières

1	Intégrale des fonctions en escalier	2
1.1	Subdivisions d'un segment	2
1.2	Fonctions en escalier	2
1.3	Intégrale d'une fonction en escalier	3
2	Intégrale des fonctions continues	4
2.1	Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier . . .	4
2.2	Intégrale d'une fonction continue	5
2.3	Sommes de Riemann	5
3	Propriétés de l'intégrale	6
3.1	Relation de Chasles et notation généralisée pour les intégrales	6
3.2	Linéarité	7
3.3	Intégrales et inégalités	7
3.4	Conséquences de la parité et de la périodicité pour l'intégrale	9
3.5	Intégrale fonction de sa borne supérieure	9
4	Formule de Taylor avec reste intégral et conséquences	10

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Introduction

Le but de ce chapitre est de définir de manière rigoureuse l'intégrale d'une fonction sur un segment.

- On commence par définir l'intégrale pour une classe de fonctions simples, appelées **fonctions en escalier**, pour lesquelles l'intégrale correspond à des aires de rectangles.
- L'intégrale d'une fonction continue est ensuite définie à l'aide d'approximations d'une telle fonction par des fonctions en escalier (ce qui correspond à la méthode des rectangles pour calculer de manière approchée une intégrale).
- Enfin, on met en évidence, à l'aide de cette construction, les principales propriétés de l'intégrale (mentionnées en début d'année) : relation de Chasles, linéarité, positivité, croissance, etc. ainsi que le lien bien connu entre intégrale et primitive.

Nous ne revenons pas dans ce chapitre sur les **techniques de calcul d'intégrales et primitives**, qui sont à **réviser** par ailleurs : primitives usuelles, intégration par parties, changement de variable, décomposition en éléments simples pour une fonction rationnelle.

1 Intégrale des fonctions en escalier

1.1 Subdivisions d'un segment

Définition 1.1 (subdivision d'un segment)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
 Une subdivision du segment $[a; b]$ est la donnée d'un nombre fini de segments $[a_0; a_1], [a_1; a_2], \dots, [a_{n-1}; a_n]$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) tels que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$.
 Une telle subdivision étant définie de manière unique par les réels a_0, a_1, \dots, a_n , on la notera comme un $(n + 1)$ -uplet : (a_0, a_1, \dots, a_n) .
 Le pas de cette subdivision est défini comme la longueur maximale des segments qui la composent, c'est-à-dire le réel strictement positif $\max_{0 \leq k \leq n-1} (a_{k+1} - a_k)$.



Exemple 1.2 (subdivision régulière d'un segment) :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 On appelle subdivision régulière de taille n du segment $[a; b]$ l'unique subdivision de $[a; b]$ qui comporte n segments de même longueur.

Son pas est donc égal à $\frac{b-a}{n}$, et la subdivision est définie par (a_0, \dots, a_n) avec $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Définition 1.3 (subdivision plus fine qu'une autre)

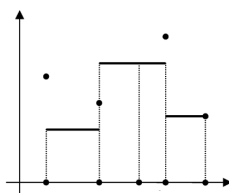
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
 On considère deux subdivisions $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ et $\sigma' = (a'_0, \dots, a'_{n'})$ du segment $[a; b]$.
 On dit que la subdivision σ' est plus fine que la subdivision σ si $\{a_0; \dots; a_n\} \subset \{a'_0; \dots; a'_{n'}\}$.

Remarque : Si $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ et $\sigma' = (a'_0, \dots, a'_{n'})$ sont deux subdivisions quelconques du segment $[a; b]$, il est possible de trouver une subdivision σ'' qui soit à la fois plus fine que σ et σ' .
 En effet, il suffit de définir $\sigma'' = (a''_0, \dots, a''_{n''})$ avec $\{a''_0; \dots; a''_{n''}\} = \{a_0; \dots; a_n\} \cup \{a'_0; \dots; a'_{n'}\}$.

1.2 Fonctions en escalier

Définition 1.4 (fonction en escalier)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
 Une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a; b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_k; a_{k+1}[$, pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, soit constante.
 On dit qu'une telle subdivision σ est une subdivision adaptée à f .



Exemple 1.5 : La fonction partie entière (restreinte à un segment $[a; b]$) est une fonction en escalier.

Remarques :

1. Les valeurs de f aux points a_k de la subdivision peuvent être quelconques.
2. Si σ est une subdivision adaptée à une fonction en escalier f , alors toute subdivision plus fine que σ sera aussi une subdivision adaptée.
Il n'y a donc pas unicité d'une subdivision adaptée.
3. Une fonction en escalier sur un segment est bornée, car elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Proposition 1.6 (combinaison linéaire de fonctions en escalier)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a; b]$ est stable par combinaison linéaire : il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a; b], \mathbb{K})$ (car il contient aussi la fonction nulle).

Démonstration. Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a; b]$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Il existe deux subdivisions σ et σ' adaptées respectivement à f et à g , et en prenant pour σ'' une subdivision plus fine que σ et σ' , alors σ'' sera une subdivision adaptée à la fois à f et à g .
On note $\sigma'' = (a_0, \dots, a_n)$ cette subdivision.
Pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, les restrictions des fonctions f et g à l'intervalle ouvert $]a_k; a_{k+1}[$ sont constantes ; il en est donc de même de la fonction $f + \lambda g$.
Ceci montre que la fonction $f + \lambda g$ est en escalier, avec pour subdivision adaptée σ'' . □

1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1.7 (intégrale d'une fonction en escalier sur un segment)

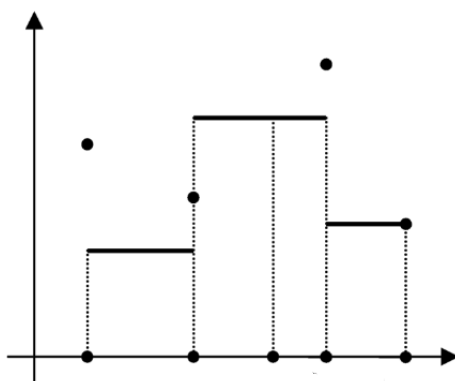
Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction en escalier.
On considère une subdivision (a_0, \dots, a_n) adaptée à f et, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on note c_k la valeur prise par f sur $]a_k; a_{k+1}[$.

On définit alors l'intégrale de f sur $[a; b]$, notée $\int_{[a;b]} f$, $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$, par :

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) c_k$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f .

Remarque : Pour une fonction réelle positive, les termes de cette somme correspondent à des aires de rectangles.



Remarque : Si f est une fonction constante égale à c , alors $\int_{[a;b]} f = \int_a^b c dt = c(b - a)$.

2 Intégrale des fonctions continues

2.1 Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier

Notation : Pour f fonction bornée définie sur un ensemble X non vide, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Cette borne supérieure est bien définie, car l'ensemble $\{|f(x)| / x \in X\}$ est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée.

Définition 2.1 (modes de convergence pour une suite de fonctions)

Soient X un ensemble non vide, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans \mathbb{K} et f une fonction de X dans \mathbb{K} .

1. On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f si :

$$\forall x \in X, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

2. On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f si, à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur X , et que l'on a :

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De manière équivalente, ceci signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

(l'entier N est le même pour tous les x dans X).

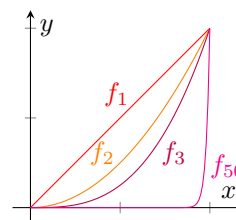
Remarque : La convergence uniforme implique la convergence simple, mais la réciproque est fausse.

Contre-exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : x \mapsto x^n$ définie sur $[0,1]$.

La suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Par contre, la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f .

En effet, $\|f_n - f\|_\infty = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

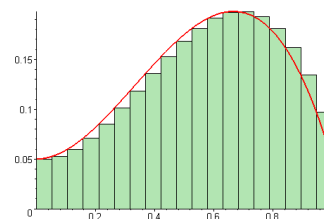
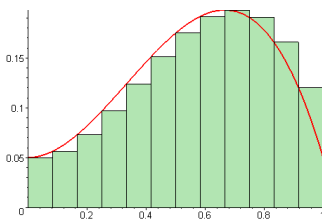
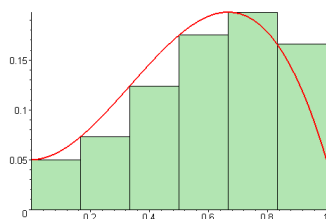


Théorème 2.2 (approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment - admis)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.

Il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier sur $[a; b]$ qui converge uniformément vers f .

Remarque : La démonstration est hors programme. Dans celle-ci, on considère la suite de fonctions (f_n) correspondant à la méthode des rectangles (à gauche) pour des subdivisions régulières de $[a; b]$. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on note $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$, on pose $f_n|_{[a_k; a_{k+1}[}$ constante égale à $f(a_k)$, et $f_n(a_n) = f_n(b) = f(b)$.



2.2 Intégrale d'une fonction continue

Définition 2.3 (intégrale d'une fonction continue sur un segment)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.

On considère une suite (f_n) de fonctions en escaliers sur $[a; b]$ qui converge uniformément vers f .

On admet que la suite d'intégrales $\left(\int_{[a;b]} f_n\right)$ converge.

On définit alors l'intégrale de f sur $[a; b]$, notée $\int_{[a;b]} f$, $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$, par

$$\int_{[a;b]} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a;b]} f_n$$

On admet que cette définition ne dépend pas du choix de la suite (f_n) de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f .

Remarques :

1. Si f est une fonction constante, elle est à la fois continue et en escalier, et les deux définitions vues pour $\int_a^b f$ coïncident.

2. L'égalité $\int_{[a;b]} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a;b]} f_n$ n'est pas valable si on suppose seulement que la suite de fonctions en escaliers (f_n) converge simplement vers f , et pas uniformément.

Contre-exemple :

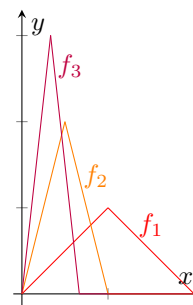
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n}[; \\ 2n - n^2 x & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}[; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f qui est la fonction nulle.

Par contre, il n'y a pas convergence uniforme car $\|f_n - f\|_\infty = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Dans cet exemple, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n = 1$ et $\int_0^1 f = 0$.



2.3 Sommes de Riemann

Comme cas particulier de la construction précédente de l'intégrale d'une fonction continue, on obtient que la méthode des rectangles converge, ce qui s'énonce de manière plus précise de la manière suivante.

Théorème 2.4 (convergence des sommes de Riemann)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. On a alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Les termes de la suite correspondent aux approximations successives de l'intégrale de f par la méthode des rectangles avec une subdivision régulière de taille n : la première somme (respectivement la seconde somme) est obtenue en remplaçant f par sa valeur à gauche (respectivement à droite) sur chaque segment de la subdivision, et en calculant l'intégrale de la fonction en escaliers correspondante.

Cas particulier : Dans le cas où le segment $[a; b]$ est égal à $[0; 1]$, la conclusion du théorème s'écrit :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Exemple 2.5 : Déterminer la nature de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$.

Proposition 2.6 (majoration de l'écart entre les sommes de Riemann et l'intégrale)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction K -lipschitzienne où $K \in \mathbb{R}_+$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{(b-a)^2 K}{2n}.$$

Remarques :

1. On a bien évidemment la même majoration pour les sommes de Riemann « à droite ».
Comme $\frac{(b-a)^2 K}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on retrouve le fait que les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale.
2. Cette majoration est en particulier vraie pour f de classe \mathcal{C}^1 . En effet, la fonction f' est continue sur un segment donc bornée, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, f est K -lipschitzienne où $K = \|f'\|_\infty$.
3. Pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 , on peut montrer que l'écart entre l'intégrale et sa valeur approchée par la méthode des trapèzes est majoré par $\frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_\infty$ (cet écart converge donc plus rapidement vers 0).

3 Propriétés de l'intégrale

3.1 Relation de Chasles et notation généralisée pour les intégrales

Théorème 3.1 (relation de Chasles pour les intégrales)

Soient a, b et c trois réels tels que $a < b < c$, et soit $f : [a; c] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.

On a la relation : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Démonstration.

1. La relation est facile à démontrer pour une fonction en escalier, en prenant une subdivision adaptée de $[a; c]$ contenant le point intermédiaire b .
2. Pour f continue, on considère une suite de fonctions en escalier (f_n) qui converge uniformément vers f .
La relation de Chasles étant démontrée pour les fonctions en escalier, on a : $\int_a^c f_n = \int_a^b f_n + \int_b^c f_n$.
On en déduit la relation de Chasles pour f par passage à la limite. □

Extension de la notation $\int_a^b f$:

1. Lorsque $a = b$, on définit : $\int_a^b f = \int_a^a f = 0$.
2. Lorsque $b < a$, on définit : $\int_a^b f = - \int_{[b;a]} f = - \int_b^a f$.

La relation de Chasles reste vraie avec ces notations généralisées, quelles que soient les positions respectives de a, b et c (démonstration en distinguant tous les cas possibles).

3.2 Linéarité

Théorème 3.2 (linéarité de l'intégrale)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

L'application $f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a; b]$.

Démonstration.

1. La propriété se démontre facilement pour des fonctions en escalier.
2. Soient f et g des fonctions continues sur $[a; b]$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
 En prenant des suites de fonctions en escalier (f_n) et (g_n) qui convergent uniformément vers f et g respectivement, on a $\int_a^b (\lambda f_n + g_n) = \lambda \int_a^b f_n + \int_a^b g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$.
 On peut aussi montrer que la suite de fonctions en escalier $(\lambda f_n + g_n)$ converge uniformément vers $\lambda f + g$, donc $\int_a^b (\lambda f_n + g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\lambda f + g)$.
 Par unicité de la limite, on en déduit $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$.
 La linéarité de l'intégrale est donc établie pour des fonctions continues. □

Remarque : Lorsque f est à valeurs complexes, $f = \Re(f) + i\Im(f)$, donc $\int_a^b f = \int_a^b \Re(f) + i \int_a^b \Im(f)$.
 On retrouve bien la définition donnée en début d'année pour l'intégrale d'une fonction complexe.

Exemple 3.3 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$, calculer $\int_a^b \frac{1}{t + i} dt$.

3.3 Intégrales et inégalités

Théorème 3.4 (positivité de l'intégrale)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $\forall x \in [a; b], f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Démonstration.

1. Le théorème est facile à démontrer pour une fonction en escalier.
2. Si f est continue positive, il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier, avec les f_n positives, qui converge uniformément vers f (prendre par exemple la suite de la méthode des rectangles).
 On a alors $\int_a^b f_n \geq 0$, donc par passage à la limite $\int_a^b f \geq 0$. □

Corollaire 3.5 (croissance de l'intégrale)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et soient f et g deux fonctions continues de $[a; b]$ dans \mathbb{R} .

Si $\forall x \in [a; b], f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Démonstration. Appliquer la propriété de positivité à la fonction $g - f$, puis la linéarité de l'intégrale. □

Théorème 3.6 (fonction continue positive et d'intégrale nulle)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est **continue, positive et d'intégrale nulle** alors f est la fonction nulle.

Conséquence : Si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue positive et n'est pas la fonction nulle, alors $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Remarque : Le même résultat est vrai avec l'hypothèse « f continue négative » (en considérant la fonction $-f$).

Corollaire 3.7 (positivité stricte de l'intégrale)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $\forall x \in [a; b], f(x) > 0$, alors $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Remarque : De même, si $\forall x \in [a; b], f(x) < 0$, alors $\int_a^b f(x) dx < 0$.

Corollaire 3.8 (croissance stricte de l'intégrale)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et soient f et g deux fonctions continues de $[a; b]$ dans \mathbb{R} . Si

$\forall x \in [a; b], f(x) < g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$.

Démonstration. Appliquer la propriété de stricte croissance à la fonction $g - f$, puis la linéarité de l'intégrale. \square

Exemple 3.9 : Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $\int_0^1 f(t) dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois.
2. On suppose que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que la fonction f admet un point fixe.

Théorème 3.10 (inégalité triangulaire)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.

On a l'inégalité suivante : $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Démonstration.

1. Pour les fonctions en escalier, ceci résulte simplement de l'inégalité triangulaire pour les sommes.
2. Pour f continue, on approche f uniformément par des fonctions en escalier, et la propriété se déduit du premier point par un passage à la limite. \square

Remarque : Pour a et b dans un ordre quelconque, l'inégalité triangulaire s'écrit : $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

3.4 Conséquences de la parité et de la périodicité pour l'intégrale

Proposition 3.11 (intégrales des fonctions paires et impaires sur un segment centré en 0)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et soit $f : [-a; a] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.

1. Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$, et donc $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
2. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt$, et donc $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Exemple 3.12 : Calculer $\int_{-1}^1 \text{Arcsin}(t) \cos(t) dt$.

Proposition 3.13 (intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période)

Soit $T > 0$, et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et T -périodique.

Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$.

Exemple 3.14 : Calculer $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{25\pi}{12}} \text{sh}(\sin(t)) dt$.

3.5 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 3.15 (théorème fondamental de l'analyse)

Soit I un intervalle non trivial, soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction **continue**, et soit $a \in I$.
La fonction

$$F : I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur I , de dérivée f . Il s'agit de l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Conséquences :

1. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
2. Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue, alors pour tous réels a et b dans I : $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f .

Méthode : Pour étudier la dérivabilité d'une fonction du type $g : x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$, avec f une fonction continue et a et b des fonctions dérivables, on exprime g à l'aide d'une primitive F de f .

Exemple 3.16 : Considérons $f : x \mapsto \int_{\sqrt{x}}^x e^{-t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer une expression de f' sur cet intervalle.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

4 Formule de Taylor avec reste intégral et conséquences

Théorème 4.1 (formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en a)

Soient une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ avec I un intervalle non trivial, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que la fonction f est de classe \mathcal{C}^{n+1} .

Alors pour tout $x \in I$, on a l'égalité suivante, appelée *formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en a* :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{\text{appelé polynôme de Taylor à l'ordre } n \text{ en } a} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{\text{appelé reste intégral à l'ordre } n \text{ en } a}$$

Remarques :

1. Pour $n = 0$, cette formule se réécrit, sous l'hypothèse que f soit de classe \mathcal{C}^1 :

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

Cette formule correspond à l'expression de l'intégrale d'une fonction continue (la fonction f') à l'aide d'une primitive (la fonction f).

2. Contrairement à la formule de Taylor-Young, la formule de Taylor avec reste intégral est valable pour tout réel x dans l'intervalle I , et pas seulement au voisinage de a .
On dit que la formule de Taylor avec reste intégral est **globale**, alors que celle de Taylor-Young est **locale**.

Inégalité de Taylor-Lagrange : Cette inégalité de Taylor-Lagrange donne une majoration de la valeur absolue (ou du module) du reste intégral, et permet ainsi de quantifier l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par son polynôme de Taylor à l'ordre n en a évalué en x .

Théorème 4.2 (inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en a)

Soient une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ avec I un intervalle non trivial, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que la fonction f est de classe \mathcal{C}^{n+1} et que la fonction $|f^{(n+1)}|$ est majorée par une constante M_{n+1} :

$$\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M_{n+1}.$$

Alors pour tout $x \in I$:

$$|f(x) - T_n(x)| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!},$$

où l'on a posé $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ (polynôme de Taylor à l'ordre n en a).

Remarques :

1. Le cas $n = 0$ correspond à l'inégalité des accroissements finis.
2. L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de démontrer la formule de Taylor-Young.

Exemple 4.3 : Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.